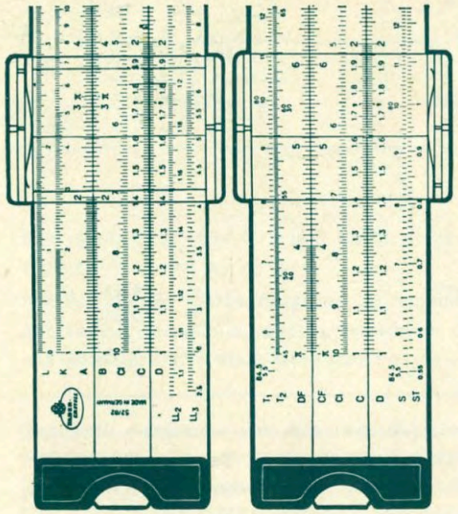
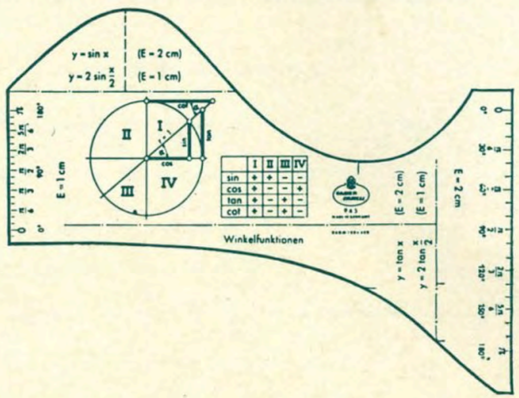


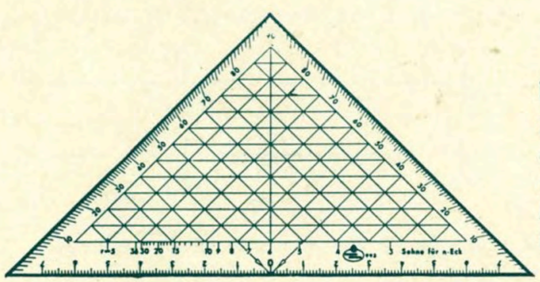
CASTELL Schul-D-Stab 52/82

Der „Castell"-Schul-D-Stab wurde als Zweiseiten-Schulrechenstab für den Unterricht an Höheren Lehranstalten und Fachschulen entwickelt. Er vereint die Exponentialskalen LL_2, LL_3, die π-versetzten Skalen CF, DF, die Skalen des Systems Rietz und die 2. Tangensskala T_2 über 45°. Die Hauptskalen auf Vorder- und Rückseite sind mit einem augenschonenden hellgrünen Farbstreifen unterlegt und treten dadurch stärker hervor. Läufer und Zunge können ungehindert bewegt werden, wenn der Stab auf der Tischplatte liegt. Jeder Stab wird in einem stabilen, durchsichtigen Plastiketui geliefert und ist mit einer ausführlichen Anleitung versehen.

Sinus-Tangens-Schablone 945

Diese Zeichenschablone aus grünem, durchsichtigen Celluloid dient dem mathematischen Zeichnen an Höheren Schulen und Fachschulen. Sie ist ein Spezialgerät zum Zeichnen von Kurven der Kreisfunktionen und enthält neben den Maßstäben für die Abszissenteilung in Grad und Bogenmaß auch ein Schema über den Funktionsverlauf.





Kombi-Winkel 993

Ein Universalgerät für Schüler und Studenten. In diesem durchsichtigen und maßbeständigen Zeichenwinkel sind Maßstab, Parallel-Lineal, Dreieck, Winkelmesser und Vieleckzeichner zweckmäßig verbunden.

A. W. FABER-CASTELL, STEIN BEI NÜRNBERG

1

1961

FABER-CASTELL

Rechenstab-Brief

Berichte und Anregungen für das Stabrechnen

Aus dem Inhalt

Verantwortliche Schriftleitung:

Dr. Peter Pirchan
Ing. Harald Bachmann

Hinweis:

Der Castell-Rechenstab-Brief wird kostenlos an Interessenten verschickt.
Weitere Druckschriften können angefordert werden.

Der CASTELL-Rechenstab-Brief, eine in zwangloser Folge erscheinende Hauszeitschrift unserer Firma, möchte eine lebendige Brücke zu allen treuen Freunden der CASTELL-Rechenstäbe schlagen und Ihnen vielseitige Anregungen für den Gebrauch und die volle Auswertung unserer mathematischen Geräte geben.

In den Beiträgen dieses Blattes werden berufene Rechenstab-Fachleute zu Worte kommen, von praktischen Erfahrungen und unbekannten Methoden im Stabrechnen berichten, den Anwendungsbereich neuer Rechenstab-Modelle darlegen und Gedanken zur Weiterentwicklung der Geräte vortragen. Neben der mathematischen Betrachtungsweise wollen wir auch der pädagogischen Seite des Rechenstab-Unterrichtes Abhandlungen erfahrener Lehrkräfte widmen.

Es ist unser Wunsch, daß die Themen des Rechenstab-Briefes bei den Lesern einen reichen Widerhall finden mögen und unser Mitteilungsblatt durch Diskussionsbeiträge aus dem Leserkreis zum Forum eines fruchtbaren Gedankenaustausches über alle Probleme und technische Neuheiten im Rechenstabbereich werde.

A. W. FABER-CASTELL- Stein bei Nürnberg

Die neuen Winkelfunktions-Skalen auf den Faber-Castell-Schul-Rechenstäben

(Auszug aus einem Vortrag des Ing. H. Bachmann auf der 50. Hauptversammlung des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e. V. in Würzburg am 2. April 1959)

Seit der Jahrhundertwende hat der Rechenstab in seinem wesentlichen Grundaufbau seine Gestalt beibehalten, das heißt, er besteht nach wie vor aus einem festen Skalenkörper, dem Stabkörper, einem in Längsrichtung verschiebbaren Skalenkörper, dem Schieber, der oft auch Zunge genannt wird, und dem längsbeweglichen Läufer zum Festhalten, Ablesen oder Einstellen der Zahlenwerte auf den Skalen.

Allerdings hat der Rechenstab in den letzten Jahren eine beachtliche Erweiterung hinsichtlich der Anzahl der aufgebrachten Skalen, des sogenannten Skalenbildes, erfahren. Vor allem ist dabei mit dem Fortschreiten der Technik die Forderung nach besonderen Funktionsskalen entsprechend berücksichtigt worden. Dadurch ist der Rechenstab in seiner Form breiter geworden. Dies hat schließlich zu der neuartigen Gestalt des **doppelseitigen** Rechenstabes geführt, die sich heute immer mehr durchsetzt. Mit Hilfe des den Stabkörper gänzlich umfassenden Läufers ist es bei diesem Modell möglich, trotz des umfangreichen Skalenbildes alle Skalen zueinander in Beziehung zu bringen.

Eine weitere Entwicklung in dieser Beziehung stellt das neue Verfahren dar, mehrere Skalen, die in ihren Funktionswerten nur geringe Unterschiede aufweisen, ineinander zu legen. Dabei ist es als besonders vorteilhaft zu bezeichnen, wenn außerdem noch zusammengehörige Skalen als Doppelskalen ausgebildet werden, d. h. die Skalen werden so nebeneinander gereiht, daß Skalengrund an Skalengrund liegt, ähnlich der bekannten Doppelskalen beim Thermometer bzw. Barometer.

Mit diesen Vereinfachungsbestrebungen am Skalenbild muß jedoch noch eine besondere Skalenanordnung Berücksichtigung finden, die es gestattet, möglichst alle gleichartigen Rechnungen nach dem **gleichen, übersichtlichen Einstell- bzw. Rechenschema** durchführen zu können.

Betrachtet man beispielsweise den allgemein bekannten Rietz-Rechenstab, der hinsichtlich des Skalenaufbaues als der „klassische" Rechenstab bezeichnet werden muß, so erkennt man, daß die Skalenanordnung für die in der Praxis immerhin ziemlich häufig anfallenden trigonometrischen Rechnungen nicht besonders glücklich gewählt ist. Will man bei diesem Stab beispielsweise für die Katheten 3 und 4 die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks ermitteln, so muß man die inverse Rechnung anwenden und dabei noch den Schieber um eine Dekade nach links durchschieben. Man stellt somit 4 : 3 (C3 über D 4) ein und erhält nach dem Durchschieben um eine Skalenlänge beim Index der Stabrückseite im linken Ausschnitt den Winkel 36° 52′ auf der Tangensskala. Nun muß man die gleichen Winkel im rechten Ausschnitt auf der Sinusskala einstellen und kann auf der Stabvorderseite bei C 3 den Wert 5 auf der D-Skala ablesen. Bei diesen

Rechnungen geht infolge der reziproken Einstellung und des Wendens des Rechenstabes sowie des öfters erforderlichen Durchschiebens der Überblick über das angewandte Rechenschema leicht verloren.

Wesentlich günstiger ist in dieser Beziehung die Anordnung der **Winkelfunktionsskalen auf der Stabvorderseite,** wie dies erstmalig beim Darmstadt-Rechenstab der Fall war und auf unsere neuesten Schul-Rechenstäbe übernommen wurde. Mit Benutzung der inversen Grundskala (CI) läßt sich dann das Seitenverhältnis des rechtwinkligen Dreiecks sehr übersichtlich einstellen und der gesuchte Winkel sofort bequem auf der entsprechenden Winkelfunktionsskala ablesen. Etwas unübersichtlich wird die Rechnung jedoch, wenn bei Benutzung der Tangensskala Winkel über 45° auftreten. In diesem Fall muß mit der inversen Funktion, also mit Cotangens gerechnet werden und der Winkel auch entsprechend als Ergänzungswinkel zum rechten Winkel abgelesen werden. Wenn diese Rechnung auch keine großen Schwierigkeiten bereitet, so ist sie doch — infolge des nötigen Umdenkens — lästig und führt auch manchmal zu Fehlablesungen.

Um nun diese Nachteile zu vermeiden und das gleiche Einstellschema für Winkel unter 45° wie über 45° anwenden zu können, tragen die neueren Castell-Rechenstäbe eine zusätzliche Tangensskala für die Winkel über 45°, die sogenannte **T_2-Skala.**

Damit ist für **alle** trigonometrischen Funktionen ein Skalenbereich von etwa **6°** bis mindestens **84°** erreicht.

Die weiteren Überlegungen gingen nun dahin, diesen Skalenbereich der trigonometrischen Funktionen möglichst so weit zu erweitern, daß **die Genauigkeit des Rechenstabes von etwa 3 Stellen absolut in diesem Bereich voll ausgenutzt werden kann.**

Diese Erweiterung konnte nun bei den neuesten Castell-Rechenstäben dadurch berücksichtigt werden, daß in die Arcusskala für kleine Winkel sowohl die Sinus- als auch die Tangens-Skala kleiner Winkel eingearbeitet wurde.

Dabei ist man von folgender Überlegung ausgegangen:

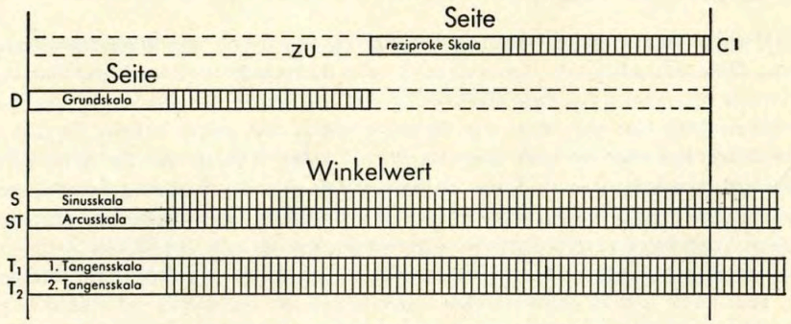
bis zu 3° gilt: $\tan \alpha \approx \text{arc}\ \alpha$; wobei $\tan 3^\circ \approx \text{arc}\ 3^\circ \approx 0{,}0524$

bis zu 5° gilt: $\sin \alpha \approx \text{arc}\ \alpha$; wobei $\sin 5^\circ \approx \text{arc}\ 5^\circ \approx 0{,}0872$.

Bringt man nun rechts und links neben den Teilstrichen der Werte für die vollen Grade auf der Arcusskala ST kleineTeilstriche als **Korrekturmarken** an, so ist man sofort in der Lage, mit ausreichender Genauigkeit die richtigen Funktionswerte für Sinus bzw. Tangens auf der Arcusskala ST einzustellen, bzw. sofort damit zu rechnen.

Mit diesem kleinen Kunstgriff hat man nun tatsächlich den Bereich aller Winkelfunktionsskalen so weit ausgedehnt, daß er sich von **3°** bis **87°** erstreckt. So ist die Forderung erfüllt, daß man in diesem Bereich bei allen trigonometrischen Aufgaben im rechtwinkligen Dreieck nach dem **gleichen, äußerst übersichtlichen Rechenschema** arbeiten kann.

Die nachstehend gezeigte Abbildung läßt den Rechenvorgang eindeutig erkennen.



Alle Winkelfunktionen stellen ein Verhältnis zweier Seiten des rechtwinkligen Dreiecks dar, so z. B.:

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \; ; \; \cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \; \text{usw.}$$

Da sich das Seitenverhältnis unter Benutzung der Reziprokskala CI durch eine einfache Streckenaddition darstellen läßt, braucht man nur jeweils an die **Skalenstrecke der D-Skala** die **Skalenstrecke der CI-Skala anzureihen** und erhält mit dem Endpunkt das Verhältnis **„Seite zu Seite"**.

Lotet man nun mit dem Läuferstrich auf die Winkelfunktionsskalen herunter, so kann man auf der entsprechenden Skala (ST für 0,01 x; S und T_1 für 0,1 x und T_2 für x) den Winkelwert ablesen.

Aber auch für den Fall, daß der Winkel und eine Seite gegeben sind, läßt sich das gleiche Rechenschema anwenden, nur muß hierbei erst der Winkelwert mit dem Läuferstrich aufgesucht werden, und auf den Skalen D oder CI die entsprechende Seite des Dreiecks berücksichtigt werden.

Für die Korrekturmarken der ST-Skala ist dabei zu merken, daß der **Tangenswert größer** und der **Sinuswert kleiner** als der Arcuswert ist, somit die **Sinusmarke links** und die **Tangensmarke rechts** vom Teilstrich der Arcusskala liegt.

Dieser Vorteil sei an einigen praktischen Beispielen erläutert:

1. Gegeben: die Katheten a = 6,12 und b = 87,5
   Gesucht: der Winkel α und die Hypotenuse c.
   Man stellt C 1 über D 612 und bringt den Läufer über CI 875. Der Läuferstrich zeigt auf ST über der Tangens-Korrekturmarke 4^0, somit ist der Winkel $\alpha = 4^0$. Bringt man nun den Läufer auf den Teilstrich 4^0 der arc-Skala ST, so kann man auf CI den Wert 87,5 für c ablesen.

2. Gegeben: die Kathete b = 4,42 und die Hypotenuse c = 46,1
   Gesucht: der Winkel α und die Kathete a.

C 1 über D 442; Läufer auf CI 461; auf ST den Winkel invers mit $84{,}5^0$ (statt 5,5) ablesen. Den Läufer um den Markenabstand nach rechts schieben und auf CI den Wert 45,9 für die Kathete a ablesen.

3. Aber auch bei Berechnungen im schiefwinkligen Dreieck ergeben sich, insbesondere wenn es sich dabei um sehr kleine Winkel handelt, wesentliche Vorteile. Soll z. B. die folgende Aufgabe unter Anwendung des Sinussatzes gelöst werden, so kann man die Lösung der Aufgabe mit einer Schiebereinstellung vornehmen.

   Gegeben: $\alpha = 6^0$; $\beta = 5^0$; c = 165
   Gesucht: a und b.

   Bekanntlich ist $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 169^0$ und $\sin \gamma = \sin (180^0 - \gamma) = \sin 11^0$. Man stellt somit C 165 über S 11^0 und kann auf der Arcusskala unter Benutzung der Korrekturmarken die Winkel mit dem Läuferstrich aufsuchen und auf der C-Skala die Werte für a = 90,4 und b = 75,4 ablesen.

4. Mit der übersichtlichen Unterbringung der trigonometrischen Skalen auf der Stabkörper-Vorderseite und Anwendung des oben erwähnten Rechenschemas lassen sich Aufgaben, die sonst umständlicherweise nur unter Anwendung des **Kosinussatzes** gelöst werden, sehr einfach und äußerst anschaulich rechnen.

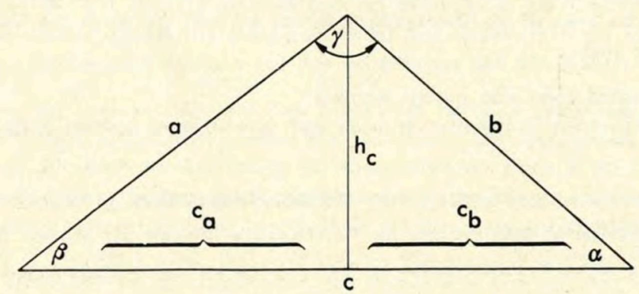
   Sind beispielsweise im schiefwinkligen Dreieck die beiden Seiten b und c sowie der eingeschlosene Winkel α gegeben, so würde hierfür normalerweise der Kosinussatz: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos \alpha}$ zur Anwendung kommen.

   Zur Ermittlnug des Winkels β muß dann noch zusätzlich der Sinussatz:

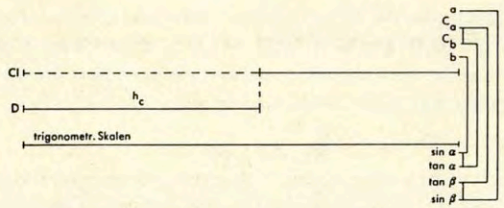
   $$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

   benutzt werden.

   Wesentlich einfacher gestaltet sich die Rechnung mit dem Rechenstab unter Einführung der Höhe h_c in den Rechnungsgang, entsprechend der Beziehungen: $h_c : b = \sin \alpha$; $h_c : c_b = \operatorname{tg} \alpha$; $h_c : c_a = \operatorname{tg} \beta$ und $h_c : a = \sin \beta$.



Diese Rechnungen sind alle mit einer Schiebereinstellung zu lösen, da die Höhe h_c gleich bleibt.



5. Gegeben: $\alpha = 42^0$; $b = 5{,}1$ und $c = 8{,}2$.
Man stellt CI 5,1 über S 42^0 und hat sofort die Grundeinstellung mit C 1 über D 3,41 (für h_c).

   Bringt man nun den Läufer auf T_1 42^0, so kann man auf CI den Wert 3,79 für C_b ablesen. Bildet man die Differenz von 8,2 (für c) und 3,79 (für c_b), so erhält man c_a mit 4,41. Unter diesem Wert auf der CI-Skala erhält man auf der T_1-Skala für $\beta = 37{,}7^0$. Bringt man dann den Läufer auf S $37{,}7^0$, so kann auf CI für $a = 5{,}58$ abgelesen werden. Da $\gamma = 180 - \alpha - \beta = 180 - 42 - 37{,}7 = 100{,}3^0$ ist, sind alle Stücke des Dreiecks bekannt.

6. Gegeben: $\beta = 37{,}7^0$; $a = 5{,}58$; $c = 8{,}2$.
Mit der Einstellung CI 5,58 über S 37,7 geht man sinngemäß vor und erhält mit $c_a = 4{,}41$ und $c_b = 3{,}79$ für α 42^0 und für $b = 5{,}1$.

7. Gegeben: $a = 5{,}58$; $b = 5{,}1$; $\gamma = 100{,}3^0$.
Hier ist zu beachten, daß die Höhe h_a zur Grundeinstellung verwendet wird und diese außerhalb des Dreiecks liegt, man stellt daher CI 5,1 über S $(180-\gamma)$ = S $79{,}7^0$ und erhält $m_a = 0{,}91$. Mit $a + m_a = 5{,}58 + 0{,}91 = 6{,}49$ erhält man $\beta = 37{,}7^0$ und $\alpha = 42^0$ sowie $c = 8{,}2$.

Bei den neuen Schul-Rechenstäben wurden zudem die Winkelfunktionen in sinnvoller Weise in zwei Doppelskalen S—ST und T_1—T_2 angeordnet. Hierdurch ist das Rechnen mit allen trigonometrischen Funktionen von etwa $0{,}5^0$—$89{,}5^0$ möglich, wobei im Bereich von etwa 3^0 bis etwa 6^0 die Unterschiede tan zu sin und arc durch die Korrekturwerte berücksichtigt sind.

Zusammenfassend kann also gesagt werden:
Durch die erläuterten Skalenerweiterungen und -anordnungen wurden folgende Vorteile erreicht:

1. eine übersichtliche und umfangreiche **Winkelfunktionstabelle** in Skalenform,
2. **Korrekturmarken** berücksichtigen die Funktionsunterschiede bei kleinen Winkeln,
3. Anwendung **eines** Rechenschemas für alle trigonometrischen Rechnungen.

Anwendung der Loglog-Skalen beim Rechenstab Castell-Duplex Nr. 2/82

von Oberstudienrat Dr. F. Heywang, Dozent am Ohm-Polytechnikum, Nürnberg

Bei fast allen wissenschaftlichen und technischen Berufen, die sich für ihre numerischen Rechnungen eines Rechenschiebers bedienen, treten oft Rechenoperationen auf, die mit dem Modell „Rietz" nicht mehr auf einfache Weise gelöst werden können. Deshalb bedeutete es einen großen Fortschritt, als das Modell „Darmstadt" geschaffen wurde, das sich vom Modell „Rietz" vor allem durch die drei auf der Rückseite der Zunge angebrachten Loglog-Skalen unterscheidet. Noch einen weiteren Schritt in dieser Richtung gehen die modernen doppelseitigen Rechenschieber, wie z. B. der CASTELL-Rechenstab „Duplex". Neben der Aufnahme der um π versetzten Skalen liegt ihr Hauptvorteil in der Erweiterung und praktischeren Anordnung der Loglog-Skalen.

Beim Rechenstab CASTELL-Duplex ist die Zahl der Loglog-Skalen auf sechs erhöht. Sie befinden sich in zwei Gruppen als LL_1, LL_2, LL_3 und LL_{01}, LL_{02}, LL_{03} symmetrisch unten und oben auf der gleichen Seite des Stabkörpers. Bezeichnet man die auf der Grundskala D angeschriebenen Werte mit x, so sind jeweils genau unter bzw. über der Stelle x auf den Loglog-Skalen folgende Werte abzulesen:

LL_1: $y_1 = e^{0,01x}$	LL_{01}: $y_1 = e^{-0,01x}$
LL_2: $y_2 = e^{0,1x}$	LL_{02}: $y_2 = e^{-0,1x}$
LL_3: $y_3 = e^{x}$	LL_{03}: $y_3 = e^{-x}$

Die Loglog-Skalen enthalten also die e-Funktionen zur Grundskala. Umgekehrt ist die Grundteilung, abgesehen von der Stellung des Kommas, der natürliche Logarithmus der auf den Log-log-Skalen angeschriebenen Werte.

Man findet also zu einem gegebenen Exponenten die zugehörige e-Funktion, indem man den Exponenten auf der D-Skala einstellt und mit dem Läufer zur Loglog-Skala übergeht. Den natürlichen Logarithmus einer Zahl findet man, indem man die Zahl mit dem Läufer auf der Loglog-Skala einstellt und den Logarithmus auf der D-Skala abliest.

Die Anordnung der Loglog-Skalen auf dem Stabkörper hat aber gegenüber der Anordnung auf der Zunge erst Vorteile, wenn man mit beliebigen Exponenten potenzieren oder radizieren will. Weil die Grundskala die Exponenten zur Basis e der Loglog-Skala darstellt, bedeutet eine gewöhnliche Multiplikation auf den Teilungen C und D für die der D-Skala entsprechenden auf der Loglog-Skala eingetragenen e-Funktionen eine Multiplikation der Exponenten. Nach den Grundregeln des logarithmischen Rechnens entspricht dem Multiplizieren der Exponenten ein Potenzieren der auf der Loglog-Skala aufgetragenen Potenzen. Das folgende Beispiel soll dies anhand der Multiplikation $2 \cdot 3 = 6$ erläutern:

Multiplikation $2 \cdot 3$	Potenz: $(e^2)^3 = 7{,}4^3$
Läufer auf D 2	Läufer auf LL_3 7,4
C 1 unter den Läufer	C 1 unter den Läufer
Läufer auf C 3	Läufer auf C 3
Resultat 6 unter dem Läufer auf D	Resultat 403 unter dem Läufer auf LL_3
$2 \cdot 3 = 6$	$7{,}4^3 = 403$

Da die C- und die CF-Skala zwar gegenseitig verschoben, aber sonst vollkommen gleich sind, kann man auch statt der Einstellung auf der C-Skala die entsprechende Einstellung auf der CF-Skala wählen. Das hat den Vorteil, daß die beiden benutzten Skalen auf der gleichen Seite des Rechenstabes aufgetragen sind, so daß das Umdrehen des ganzen Rechenstabes in diesem Fall vermieden wird.

Beide Rechnungen unterscheiden sich nur dadurch, daß beim Multiplizieren der Ausgangswert 2 und das Resultat 6 auf der D-Skala, beim Potenzieren der Ausgangswert 7,4 und das Resultat 403 auf der LL_3-Skala eingestellt bzw. abgelesen werden. Die Einstellungen beim Potenzieren sind sonst genau die gleichen wie beim Multiplizieren. Da man aber auf dem Rechenstab mit jeder beliebigen Zahl multiplizieren kann, läßt sich auch mit jedem beliebigen Exponenten potenzieren. Entsprechend sind beim Radizieren mit einem beliebigen Wurzelexponenten genau dieselben Einstellungen erforderlich wie beim Dividieren, wieder mit dem einzigen Unterschied, daß Radikand und Ergebnis auf der Loglog-Skala eingestellt bzw. abgelesen werden.

B e i s p i e l : $\sqrt[5]{200}$

Läufer auf LL_3 200
C 5 unter den Läufer
Läufer auf C 1
Resultat 2,88 unter dem Läufer auf LL_3 $\quad \sqrt[5]{200} = 2{,}88$

Würde ein Resultat nach rechts (oder links) aus dem Skalenbereich herausfallen, so hilft man sich mit dem sogenannten „Durchschieben" (auch Zungenrückschlag genannt). Dabei wird zum Ausgangswert nicht die Marke C 1, sondern die Marke C 10 hingeschoben. Auf der Loglog-Skala ist dann der Übergang zur nächsthöheren oder zur nächstniedrigen Skala erforderlich.

B e i s p i e l : $1{,}6^{4,3}$

Läufer auf LL_2 1,6
C 10 (oder CF 1) unter den Läufer
Läufer auf C 4,3 (oder auf CF 4,3)
Resultat 7,55 unter dem Läufer auf LL_3 $\quad 1{,}6^{4,3} = 7{,}55$

Sollen Exponenten oder Logarithmen zu beliebigen Grundzahlen abgelesen werden, so erfolgt dies auf der C- (oder CF-) Skala, wobei die Basis unter C 1 (oder CF 1) auf den Loglog-Skalen eingestellt wird.

B e i s p i e l : ${}^{1,6}\log 7{,}55$
Läufer auf LL_2 1,6
CF 1 unter den Läufer
Läufer auf LL_3 7,55
Resultat 4,3 unter dem Läufer auf CF $\quad {}^{1,6}\log 7{,}55 = 4{,}3$

Ein Gebiet, bei dem man mit Vorteil die Loglog-Skalen verwenden kann, ist die Zinseszinsrechnung. Wer täglich solche Rechnungen auszuführen hat, wird nach wie vor dabei Tabellen und Rechenmaschinen verwenden. Wem aber keine solche Hilfsmittel zur Verfügung stehen, der kommt mit den Loglog-Skalen eines Rechenschiebers viel einfacher zu einem auch hinsichtlich der Genauigkeit befriedigenden Ergebnis als mit der Logarithmentafel.

B e i s p i e l e :
Berechne den Endwert k eines Kapitals von 6350 DM bei einem Zinsfuß von 4,5% nach 5 Jahren.

$k = 6350\ \text{DM} \cdot 1{,}045^5$
Läufer auf LL_1 1,045
CF 1 unter den Läufer
Läufer auf CF 5
Resultat 1,246 unter dem Läufer auf LL_2 $\quad 1{,}045^5 = 1{,}246$
$k = 6350\ \text{DM} \cdot 1{,}246 = 7910\ \text{DM}$

Bei welchem Zinsfuß beträgt der Barwert eines in 6 Jahren fälligen Kapitals von 9000 DM nur 6000 DM?
$6000\ \text{DM} \cdot q^6 = 9000\ \text{DM}$

$q = \sqrt[6]{1{,}5}$
Läufer auf LL_2 1,5
CF 6 unter den Läufer
Läufer auf CF 1
Resultat 1,0698 unter dem Läufer auf LL_1 $\quad q = 1{,}0698 \approx 1{,}07$
Der Zinsfuß beträgt also 7%.

Wichtiger sind die Anwendungen der Loglog-Skalen aus dem Arbeitsgebiet der naturwissenschaftlichen und technischen Berufe. Einige Beispiele dazu sollen die nachfolgenden Rechnungen geben:

1. Bestimme nach der barometrischen Höhenformel $p = p_0\, e^{-\frac{h}{7990\,\text{m}}}$ den mittleren Luftdruck auf der Zugspitze ($h = 2964$ m)

   $p = 760\ \text{Torr} \cdot e^{-\frac{2964}{7990}} = 760\ \text{Torr} \cdot e^{-0{,}371}$
   Läufer auf D 3,71

   Resultat 0,690 unter dem Läufer auf LL_{02} $\quad e^{-0{,}371} = 0{,}690$
   $p = 760\ \text{Torr} \cdot 0{,}690 = 524\ \text{Torr}$

2. Ein Zählrohr registriert bei einem radioaktiven Isotop nach Abzug des Nulleffekts 3240 Impulse/min. 40 Minuten später nur noch 2475 Impulse/min. Welche Halbwertszeit besitzt das Präparat?

Die Impulsabnahme erfolgt nach der Gleichung $n = n_0 e^{-\alpha t}$

$2475 = 3240 \cdot e^{-\alpha \cdot 40\,min}$ $\qquad e^{-\alpha \cdot 40\,min} = 0{,}764$

$$\alpha = \frac{-\ln 0{,}764}{40\ min.}$$

Läufer auf LL_{02} 0,764
Resultat 0,269 unter dem Läufer auf D
$\ln 0{,}764 = -0{,}269$

$$\alpha = \frac{0{,}269}{40\ min.} = 0{,}006725\ min^{-1}$$

Die Zerfallsgleichung lautet also $n = n_0 \cdot e^{-0{,}006725\ min^{-1} \cdot t}$

Für die Halbwertszeit T gilt: $\frac{n_0}{2} = n_0 \cdot e^{-0{,}006725\ min^{-1} \cdot T}$

$$\ln \frac{1}{2} = -0{,}693 = -0{,}006725\ min^{-1} \cdot T$$

$$T = \frac{0{,}693}{0{,}006725}\ min = 103\ min.$$

3. In einem Dieselmotor wird das Zylindervolumen vor dem Einspritzen des Brennstoffs im Verhältnis 13 : 1 komprimiert. Berechne den dabei entstehenden Enddruck p_2 und die Endtemperatur t_2, wenn beim Beginn der Kompression der Druck $p_1 = 1$ at und die Temperatur $t_1 = 40^0$ C betragen.

Der rasch verlaufende Kompressionsvorgang verläuft adiabatisch. Dafür gelten die Gleichungen:

$$p_1 \cdot V_1{}^{\varkappa} = p_2 \cdot V_2{}^{\varkappa} \qquad T_1 \cdot V_1{}^{\varkappa - 1} = T_2 \cdot V_2{}^{\varkappa - 1}$$

In diesen Gleichungen ist: $p_1 = 1$ at, $\frac{V_1}{V_2} = 13$, $T_1 = 40^0 + 273^0 = 313^0$.

Das im Exponenten auftretende Verhältnis der spezifischen Wärmen hat für Luft den Wert 1,4. Durch Einsetzen dieser Zahlenwerte findet man:

$p_2 = 1$ at $\cdot\ 13^{1,4}$
Läufer auf LL_3 13
CF 1 unter den Läufer
Läufer auf CF 1,4
Resultat 36,3 unter dem Läufer auf LL_3
Der Enddruck p_2 beträgt 36,3 at
$T_2 = 313^0K \cdot 13^{0,4}$
Läufer auf LL_3 13
CF 1 unter den Läufer
Läufer auf CF 4

Resultat 2,79 unter dem Läufer auf LL_3 $\qquad 13^{0,4} = 2{,}79$
Die Endtemperatur beträgt also $T_2 = 313^0K \cdot 2{,}79 = 873^0K$; $t_2 = 600^0$ C.

4. An einem Seil hängt eine Last von 180 kp. Das Seil ist $1^1/_3$ mal (480⁰) um eine feste Scheibe geschlungen; sein Ende wird von einem Arbeiter festgehalten. Welche Kraft muß dieser aufwenden, wenn die Reibungszahl μ zwischen Scheibe und Seil 0,4 beträgt? Nach der Formel für die Seilreibung gilt folgende Beziehung zwischen den Kräften S_1 und S_2 an den beiden Teilen des Seiles:

$$S_2 = S_1 \cdot e^{\mu \alpha}$$

α ist der im arc-Maß gemessene Umschlingungswinkel, der hier $\alpha = \frac{8}{3} \pi = 8{,}38$ beträgt. Für die gesuchte Kraft S_1 findet man:

$S_1 = 180\ kp \cdot e^{-0,4 \cdot 8,38} = 180\ kp \cdot e^{-3,35}$
Läufer auf D 3,35
Resultat 0,035 unter dem Läufer auf LL_{03} $\qquad e^{-3,35} = 0{,}035$
$S_1 = 180\ kp \cdot 0{,}035 = 6{,}3\ kp$
Zum Festhalten der Last genügt eine Kraft von 6,3 kp.

5. Welche Endgeschwindigkeit kann eine Rakete bei Vernachlässigung der zu überwindenden Gravitation und des Luftwiderstandes erreichen, wenn die Verbrennungsgase mit der Geschwindigkeit $v_0 = 3400$ m/s ausgestoßen werden und die Endmasse m_e der ausgebrannten Rakete nur noch 22% der Anfangsmasse m_a beträgt.

Die Endgeschwindigkeit folgt aus der Raketengleichung:

$$v_e = v_0 \cdot \ln \frac{m_a}{m_e}$$

$$v_e = 3400 \frac{m}{s} \cdot \ln \frac{m_a}{0{,}22 m_a} = 3400 \frac{m}{s} \cdot \ln 4{,}55$$

Läufer auf LL_3 4,55
Resultat 1,515 unter dem Läufer auf D $\qquad \ln 4{,}55 = 1{,}515$

$$v_e = 3400 \frac{m}{s} \cdot 1{,}515 = 5150 \frac{m}{s}$$

Die Auswahl der Beispiele ist hier naturgemäß unvollständig. Gerade die Anwendungen der Loglog-Skalen liegen zumeist bei besonderen, speziellen Problemen, die keine große Bedeutung für die Allgemeinheit besitzen und daher hier nicht aufgenommen werden können. Die einfache Anwendung dieser Skalen gestattet aber jedem Besitzer eines Rechenstabes CASTELL-Duplex, in einem solchen Fall selbst den Lösungsweg zu finden.

Einige Anwendungsmöglichkeiten der reziproken Quadratskala (BI-Skala) im Stahlbetonbau

von Dipl. Ing. Friedrich Dworschak
städt. Oberbaurat am Rudolf-Diesel-Polytechnikum der Stadt Augsburg

Die nachstehend beschriebenen Anwendungen der BI-Skala, wie man sie auf den Rechenstabsystem CASTELL-Duplex findet, sind aus dem Kreis der Möglichkeiten willkürlich herausgegriffen. Ein Anspruch auf Vollständigkeit wird deshalb nicht erhoben. Es wurde jedoch darauf Wert gelegt, der Erläuterung einen geschlossenen Fragenkomplex — hier die Berechnung von Stahlbetonplatten und -balken — zu Grunde zu legen.

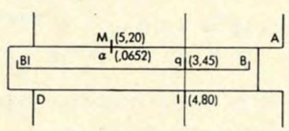
1. **Biegemomente**

Die bemessungsmaßgebenden Feld- und Stützmomente dieser Tragwerksteile sind im häufigsten Fall einer Gleichlast q (Tonnen/Meter) gegeben in der Form

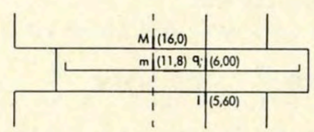
$$M = \alpha\, q\, l^2 \qquad 1\ a),$$

$$\text{bzw. } M = \frac{q l^2}{m} \qquad 1\ b),$$

wobei die Werte α, bzw. m, je nach Felderzahl, Stützweitenverhältnissen usw. aus Tabellen (Betonkalender, Anger, Graudenz etc.) entnommen werden können.
Beide Formeln können unter Benützung der BI-Skala nach folgendem Schema eingestellt werden, wobei die Stützweite l der Grundskala D und die Meterlast q der BI-Skala zugeordnet ist. Das Biegemoment M erscheint auf A, wo es zur Weiterrechnung nach Punkt 2 gebraucht wird.



zu 1a)



zu 1b)

Beispiele: $M = 0{,}0652 \cdot 3{,}45 \cdot 4{,}80^2 = 5{,}20$ tm

$$M = \frac{6{,}00 \cdot 5{,}60^2}{11{,}8} = 16{,}00 \text{ tm}$$

Die zugehörigen Zahlenwerte sind in obigen Einstellbildern eingetragen.

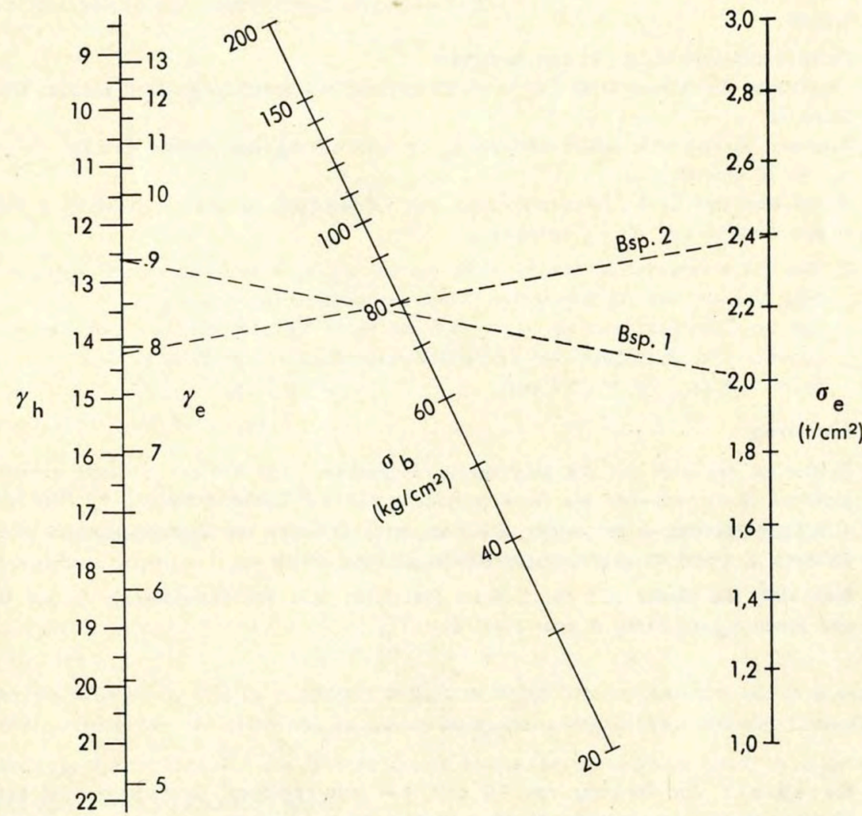
2. **Bemessung**

Für die Kontrolle der in einem Stahlbetonrechteckquerschnitt unter der Wirkung eines Biegemoments M auftretenden Betonspannung und die Feststellung des zugehörigen erforderlichen Stahlquerschnitts lassen sich unter Anlehnung an Pucher (Lehrbuch

des Stahlbetonbaus, Wien 1949, Springer Verlag) mit den im Stahlbetonbau üblichen Bezeichnungen — ohne Angabe der Ableitung — die Ansätze machen:

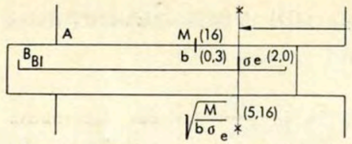
$$h = \gamma_h \sqrt{\frac{M}{b\sigma_e}} \quad 2\ a) \qquad \text{und} \quad \frac{F_e}{b} = \gamma_e \sqrt{\frac{M}{b\sigma_e}} \quad 2\ b).$$

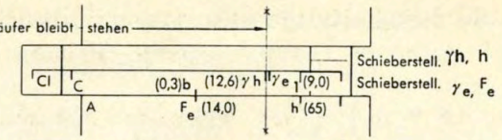
Die Werte γ_h und γ_e sind nur vom Spannungsverhältnis σ_e/σ_b abhängig, so daß an Stelle der sonst erforderlichen Vielzahl von Tabellen (für jedes σ_e eine) eine einzige treten kann, die zum Beispiel praktisch die Form einer Fluchtlinientafel*) haben kann.



Sie ermöglicht zusammen mit den beiden den Formeln 2a) und 2b) entsprechenden Rechenschiebereinstellungen, die nachstehend dargestellt sind, die Lösung aller einschlägigen Bemessungsaufgaben.

*) Für eine praktisch ausreichende Genauigkeit muß die Tafel die Größe DIN A 4 haben. Die verkleinerte Wiedergabe soll nur das Verfahren demonstrieren.





B e i s p i e l e : 1. Ein Balken b/h = 30/65 cm ist für ein Moment M = 16 tm nachzuprüfen bzw. zu bemessen. Zulässig σ_e / σ_b = 2000/80 kg/cm².

Man stellt B 30 (b = 0,3 m) unter A 16 (M = 16 tm), bringt den Läufer auf Bl 2 und erhält auf D den Wert für $\sqrt{\frac{M}{b\sigma_e}}$ = 5,16, der nicht abgelesen zu werden braucht.

Diese Läuferstellung bleibt nun bestehen.

Stellt man C 10 über D 65 (für h = 65 cm) so liest man γ_h = 12,6 auf der Cl-Skala ab.

Aus dem Nomogramm erhält man bei γ_h = 12,6, für γ_e den Wert 9 und für σ = 78 kg/cm².

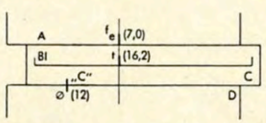
Bringt man nun Cl 9 (Überskala) unter den Läuferstrich, so kann man bei C 3 auf D den Wert 14 cm² für F_e ablesen.

2. Das von einem Balken b/h = 35/55 cm bei σ_e / σ_b = 2400/80 kg/cm² aufnehmbare Moment und die zugehörige Armierung sind zu berechnen.
   Aus der Tafel liest man ab: γ_h = 14,2 und γ_e = 7,9 und erhält auf dem Rechenschieber jetzt in umgekehrter Einstellungsreihenfolge wie in Beispiel 1):
   M = 12,6 tm, Fe = 10,7 cm²

3. **Armierung**

Schließlich sei noch auf die Möglichkeit hingewiesen, den mit der Bl-Skala ausgestatteten Rechenschieber als Rundstahltabelle für die Deckenarmierung f_e (cm² je 1 m Deckenbreite) zu verwenden, die man durch Verlegen von Bewehrungseisen des Kalibers ϕ (mm) im gegenseitigen Abstand t (cm) erhält.

Man stellt die Marke „C" der C-Skala (bei 1,13) über den Durchmesser ϕ auf D und erhält f_e auf Skala A über t auf Bl.



B e i s p i e l : Zur Deckung von 7,0 cm² / 1 m erforderlichem Querschnitt sind bei ϕ 12, t = 16,2 cm, bzw. bei ϕ 10, t = 11,2 cm notwendig.

Natürlich läßt sich auch in Umkehrung der Rehenfolge jede der drei Größen ϕ, f_e und t aus den beiden anderen in einer Einstellung ermitteln.

Auf eine Begründung der angegebenen Einstellungen wurde verzichtet. Sie ergibt sich aus den Formeln und den Gesetzmäßigkeiten des Rechenschiebers von selbst. Eine Variation nach den persönlichen Rechengewohnheiten des einzelnen ist durchaus möglich.

Auflösung quadratischer Gleichungen mit dem Rechenstab

von Ing. H. Bachmann

Mit der Berechnung von Zahlenwerten elementarer Funktionen ist der Gebrauchsumfang eines Rechenstabes nicht völlig erschöpft, sondern man kann den Rechenstab auch sehr vorteilhaft bei der Lösung mancher mathematischen Probleme, insbesondere bei der Lösung der Gleichungen höheren Grades einsetzen.

In den folgenden Erläuterungen soll deshalb die in der Praxis öfters benötigte Auflösung quadratischer Gleichungen mit Hilfe des Rechenstabes näher erläutert werden.

Die Normalform der quadratischen Gleichung lautet:

$$x^2 + a x + b = 0$$

Führt man in gewohnter Weise die Erweiterung mit $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ durch, so erhält man:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$$

bzw.

$$x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

und die beiden Wurzeln:

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

$$x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

wobei $x_1 + x_2 = -a$ und

$x_1 \cdot x_2 = +b$

Aus der letzten Gleichung erhält man $\frac{b}{x_1} = x_2$.

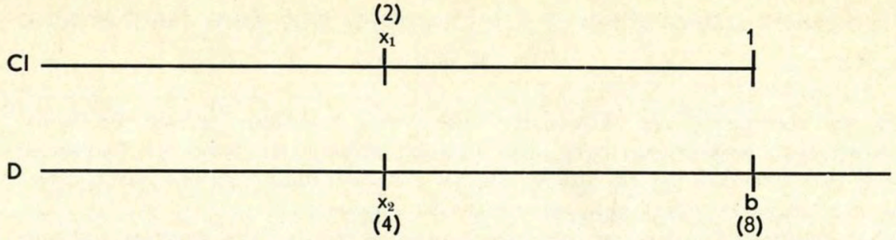
Setzt man diesen Wert für x_2 in die vorletzte Gleichung ein, so erhält man die für das Stabrechnen günstige Form der quadratischen Gleichung:

$$x_1 + \overbrace{\frac{b}{x_1}}^{x_2} = -a$$

Um die Wurzeln x_1 und x_2 zu finden, stellt man einen Schieberendstrich auf D b und erhält mittels des Läuferstriches zu jedem Wert von x der D-Skala auf der Cl-Skala den zugehörigen Wert $\frac{b}{x}$. Die Summe dieser beiden Werte soll nun gleich — a sein, was durch Probieren erreicht wird.

Zum Beispiel:

$x^2 - 6x + 8 = 0$	$x^2 + ax + b = 0$
$x_1 + \frac{8}{x_1} = 6$	$x_1 + \frac{b}{x_1} = -a$
$\frac{8}{x_1} = x_2$	$\frac{b}{x_1} = x_2$



Man stellt CI 1 über D 8 und findet durch Probieren mit dem Läufer $2 + 4 = 6$, also $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$.

Bei der Lösung dieser Aufgaben ist besonders auf den Stellenwert und das Vorzeichen der beiden Wurzeln x_1 und x_2 zu achten. Das Vorzeichen der Wurzeln wird vorteilhaft aus nachstehender Tabelle entnommen.

b	a	Wurzeln	
—	+	absolut größere Wurzel —; kleinere +	
—	—	absolut größere Wurzel +; kleinere —	
+	+	beide Wurzeln —	für $b > \left(\frac{a}{2}\right)^2$ sind
+	—	beide Wurzeln +	die Wurzeln komplex

Zum Beispiel:

$$x^2 + 4x - 5 = 0; \quad x_1 - \frac{5}{x_1} = -4; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = -5$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0; \quad x_1 - \frac{5}{x_1} = 4; \quad x_1 = 5; \quad x_2 = -1$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0; \quad x_1 + \frac{3}{x_1} = -4; \quad x_1 = -1; \; x_2 = -3$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0; \quad x_1 + \frac{3}{x_1} = 4; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 3$$

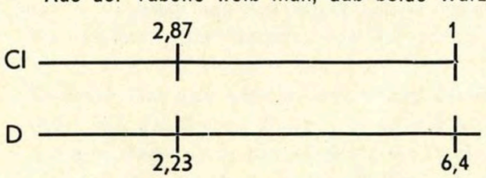
$x^2 - 2x + 8 = 0$; komplexe Wurzeln; $x_{1,2} = 1 \pm i\,2{,}65$;

in diesem Fall muß man die Formel $x_1, x_2 = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ anwenden.

Weitere praktische Beispiele:

1.) $x^2 - 5{,}1\,x + 6{,}4 = 0.$

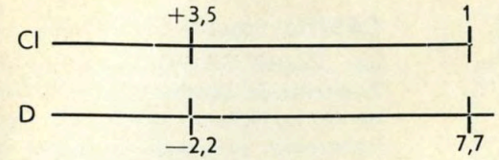
Aus der Tabelle weiß man, daß beide Wurzeln positiv sind:



$$x_1 = 2{,}87$$
$$x_2 = 2{,}23$$
$$x_1 + x_2 = 5{,}10$$

2.) $x^2 - 1{,}3\,x - 7{,}7 = 0.$

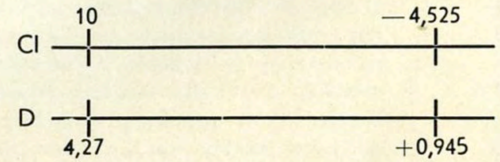
Aus der Tabelle weiß man, daß die absolut größere Wurzel positiv sein muß.



$$x_1 = +3{,}5$$
$$x_2 = -2{,}2$$
$$x_1 + x_2 = +1{,}3$$

3.) $x^2 + 3{,}58\,x - 4{,}27 = 0;$

die absolut größere Wurzel ist negativ.



$$x_1 = -4{,}525$$
$$x_2 = +0{,}945$$
$$x_1 + x_2 = -3{,}580$$

Die Anwendung der Tabelle bringt den Vorteil, daß man sich von vornherein über das Vorzeichen der Wurzeln klar ist und beim Einstellvorgang für b das Vorzeichen nicht berücksichtigen braucht. Man muß sich jedoch stets vor Augen halten, daß die Summe der Wurzeln dem Werte von a mit entgegengesetzten Vorzeichen entspricht.